

# LOTUL NAȚIONAL DE INFORMATICĂ

Stagiul de pregătire a lotului național de informatică 20-27 mai 2017 Alexandria

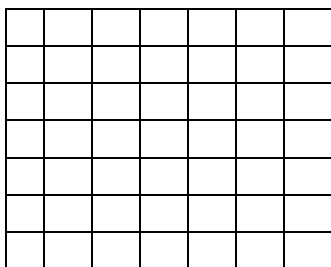
Pavarea suprafețelor dreptunghiulare folosind piese de forme specificate, Doru Anastasiu Popescu, Universitatea din Pitești

## Pavarea suprafețelor dreptunghiulare folosind piese de forme specificate

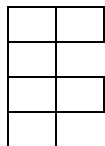
Doru Anastasiu Popescu, Universitatea din Pitești

În ultimii ani s-a conturat o clasă specială de probleme, care se referă la pavarea unor suprafețe dreptunghiulare formate din pătrățele de aceeași dimensiune cu piese de diferite forme. Aceste piese fiind formate din pătrățele de aceeași dimensiune ca cele din care este alcătuită suprafața dreptunghiulară.

Exemplu de suprafață:



Exemple de piese:



Uneori suprafața dreptunghiulară poate avea porțiuni blocate, ce nu trebuiesc acoperite cu piese sau au dimensiunile cu anumite proprietăți.

Prin pavarea unei suprafețe înțelegem acoperirea cu piese a suprafeței specificate în probleme fără suprapuneri și piese care ies de pe aceasta.

Soluția problemei de cele mai multe ori este memorată într-un tablou bidimensional folosind numere consecutive asociate în mod unic fiecărei piese folosite.

# LOTUL NAȚIONAL DE INFORMATICĂ

Stagiul de pregătire a lotului național de informatică 20-27 mai 2017 Alexandria

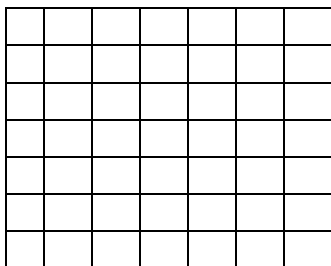
Pavarea suprafețelor dreptunghiulare folosind piese de forme specificate, Doru Anastasiu Popescu, Universitatea din Pitești

## Metode folosite în rezolvare

1. Backtracking – pentru suprafețe mici
2. Divide et Impera – așezarea unor piese și apoi împărțirea în subtablouri ce urmează să fie pavate cu aceeași regulă
3. Raționament inductiv – se construiesc tablouri din ce în ce mai mari, folosind același pas de inducție de la o etapă la alta.
4. Lipirea unor piese și formarea unor piese mai mari în formă dreptunghiulară. Apoi aceste piese mai mari sunt folosite la pavare prin metode constructive.

## Problema patrat (Barajul de selecție a lotului olimpic pentru IOI, 2001)

Un pătrat este împărțit prin drepte horizontale și verticale în  $(6N+1)^2$  pătrățele egale. Spre exemplu pentru  $N=1$  se obține:



Să se acopere pătratul inițial, cu piese de forma:



astfel încât:

- să nu existe suprapuneri ale acestor piese;
- să rămână neacoperit pătrățelul de pe linia P și coloana Q.

Fișier de intrare PATRAT.IN are structura:

Linia 1: N

număr natural având semnificația din enunț.

Linia 2: P Q

două numere naturale separate printr-un spațiu, având semnificația din enunț.

Fișier de ieșire PATRAT.OUT are structura:

Liniile 1, 2, ...,  $6N+1$

pe fiecare din aceste linii se vor afla  $6N+1$  valori întregi pozitive, separate prin spații. Ele corespund unui tablou bidimensional cu  $6N+1$  linii și  $6N+1$  coloane care descrie modul de acoperire a pătratului. Pentru fiecare piesă există trei numere egale (din mulțimea  $\{1, 2, \dots, 12N^2+4N\}$ ) ce o reprezintă. Nu se pot codifica două piese cu aceleași numere. Pătrățelului de pe linia P și coloana Q îi va fi asociat numărul 0.

# LOTUL NAȚIONAL DE INFORMATICĂ

Stagiul de pregătire a lotului național de informatică 20-27 mai 2017 Alexandria

Pavarea suprafețelor dreptunghiulare folosind piese de forme specificate, Doru Anastasiu Popescu, Universitatea din Pitești

Restricții

$1 \leq N \leq 20$

$1 \leq P, Q \leq 6N+1$

Exemplu

PATRAT.IN

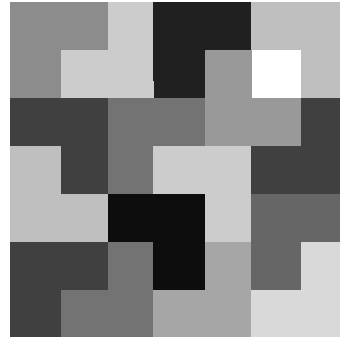
1

2 6

PATRAT.OUT

1	1	2	3	3	5	5
1	2	2	3	4	0	5
6	6	8	8	4	4	10
7	6	8	9	9	10	10
7	7	12	12	9	16	16
13	13	14	12	15	16	11
13	14	14	15	15	11	11

Soluția corespunde acoperirii:

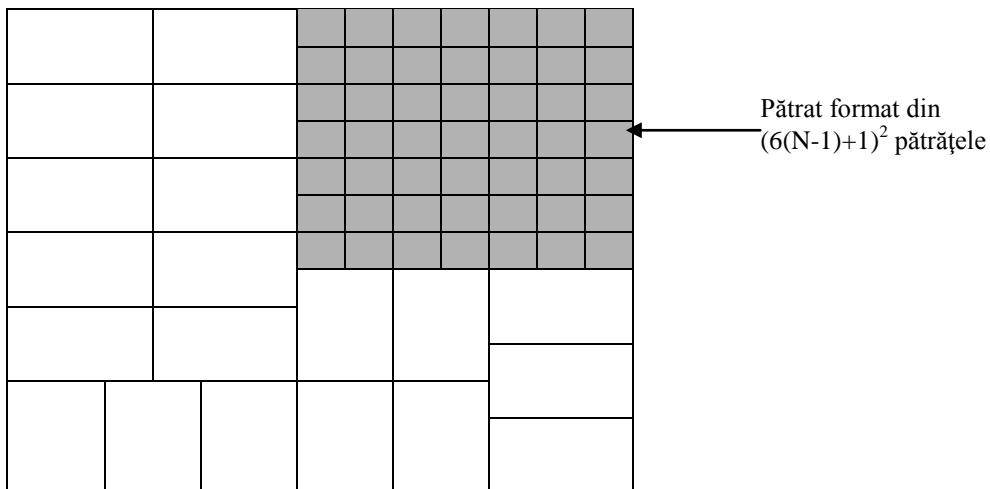


Observație: Ordinea de numerotare a pieselor nu este importantă.

## Soluție

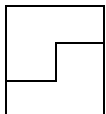
Rezolvarea problemei o vom face prin inducție matematică după  $n$  cu pasul 1.

Acoperirea pătratului format din  $(6N+1)^2$  pătrățele se reduce la acoperirea unui pătrat format din  $(6(N-1)+1)^2$  pătrățele, împărțind pătratul inițial ca în figura de mai jos (sau o alta figură ca cea de mai jos obținută prin rotire cu  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  sau  $270^\circ$ ):



în funcție de poziția pătrățelului care lipsește (adică acesta trebuie să fie în zona hașurată).

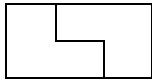
Fiecare dreptunghi de dimensiune  $2 \times 3$  se poate acoperi folosind figuri ca cele din enunț în modul următor:



# LOTUL NAȚIONAL DE INFORMATICĂ

Stagiul de pregătire a lotului național de informatică 20-27 mai 2017 Alexandria

Pavarea suprafețelor dreptunghiulare folosind piese de forme specificate, Doru Anastasiu Popescu, Universitatea din Pitești



Se continuă procedeul până se ajunge la acoperirea unui pătrat format din  $7 \times 7$  pătrățele care conțin pătrățelul de coordonate  $(P, Q)$  ce nu trebuie acoperit de piese. Acoperirea acestuia se poate realiza folosind eventual metoda backtracking (într-un program separat) și apoi declararea unor tablouri constante ce o codifică.

**Problema domino** (Baraj lot olimpic, 2004)

Se dă o tablă de șah cu  $m$  linii și  $n$  coloane, cu  $m \cdot n$  număr par și  $m \cdot n / 2$  piese de domino de dimensiune cât două pătrățele alăturate de pe tabla de șah. Pe fiecare piesă de domino se află două numere egale (câte unul în fiecare pătrățel) din mulțimea  $\{1, 2, \dots, m \cdot n / 2\}$ . Nu există piese de domino cu același numere. Se cere să se găsească o modalitate de așezare a tuturor pieselor de domino pe tabla de șah astfel încât acestea să nu se suprapună și să îndeplinească condiția ca orice segment cu capetele pe două laturi opuse (ale tablei de șah) și paralel cu celelalte intersectează în interior cel puțin o piesă de domino.

Scrieți un program care determină o modalitate de așezare a pieselor de domino cu respectarea condiției din enunț.

Fișierul de intrare **domino.in** conține pe prima linie numerele naturale  $m$  și  $n$ , separate printr-un spațiu.

Fișierul de ieșire **domino.out** va conține  $m$  linii, pe fiecare linie se va afla câte  $n$  numere separate prin câte un spațiu ce aparțin dominourilor de pe tabla de șah, în cazul în care există soluție. Dacă nu există soluție în fișierul **domino.out** se va scrie pe prima linie cifra 0.

## Restricții

$2 \leq m, n \leq 170$ , iar  $m \cdot n$  este număr par

## Exemplu

**domino.in**

5 6

**domino.out**

1 2 2 4 4 5

1 3 3 6 7 5

8 8 9 6 7 13

10 11 9 12 12 13

10 11 14 14 15 15

## Observație

Exemplul anterior corespunde așezării următoare:

# LOTUL NAȚIONAL DE INFORMATICĂ

Stagiul de pregătire a lotului național de informatică 20-27 mai 2017 Alexandria

Pavarea suprafețelor dreptunghiulare folosind piese de forme specificate, Doru Anastasiu Popescu, Universitatea din Pitești

1	2	2	4	4	5
1	3	3	6	7	5
8	8	9	6	7	13
10	11	9	12	12	13
10	11	14	14	15	15

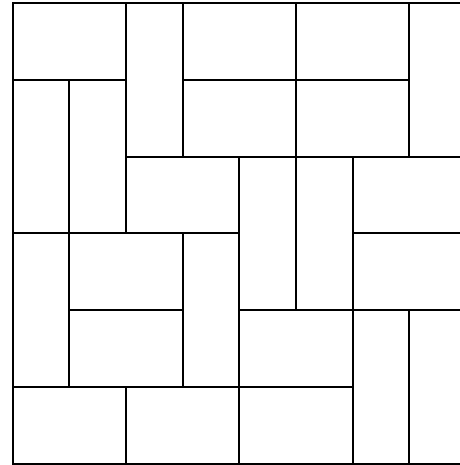
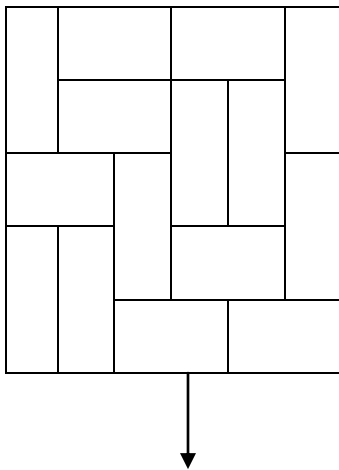
## Indicație

Se poate verifica ușor că problema nu are soluție pentru cazurile:

1.  $m=2,3,4$ ,  $n$  -oarecare
2.  $n=2,3,4$ ,  $m$  -oarecare
3.  $m=6$ ,  $n=6$

Construirea unei soluții (este evident că soluția nu este unică) se poate realiza inductiv trecând de la tabla de șah  $m \times n$  la tabla de șah  $(m+2) \times n$ . Pentru acest lucru avem nevoie de construirea soluției în cazurile  $m=5$  și  $m=6$ . Pentru  $n=5$  se poate găsi chiar în enunțul problemei. În figurile următoare este prezentată trecerea de la acoperirea tablei

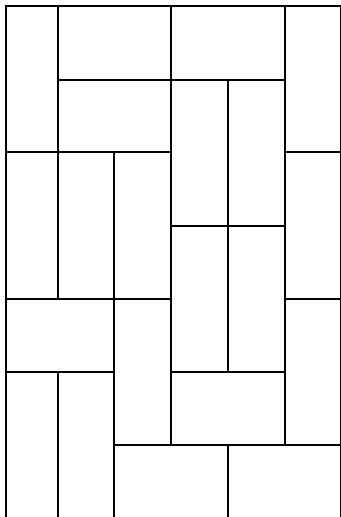
$5 \times 6$  la cea a tablei  $7 \times 6$ , respectiv de la  $6 \times 8$  la  $8 \times 8$ .



# LOTUL NAȚIONAL DE INFORMATICĂ

Stagiul de pregătire a lotului național de informatică 20-27 mai 2017 Alexandria

Pavarea suprafețelor dreptunghiulare folosind piese de forme specificate, Doru Anastasiu Popescu, Universitatea din Pitești

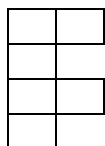


## Pavare (ONI, 2008, cls. X)

După terminarea facultății, Ionică a ajuns inginer constructor și vrea să se angajeze în orașul său natal. După ce studiază ofertele de muncă, găsește un post de inginer la Primărie. Pentru a ocupa acest post trebuie să susțină o probă teoretică. La această probă, el trebuie să realizeze un proiect pentru pavarea pieței din centrul orașului.

Piața are forma unui dreptunghi și are trasat un caroiaj, astfel încât poate fi reprezentată ca un tablou bidimensional cu  $n$  linii și  $p$  coloane. Fiecare element al matricei corespunde unui pătrat cu latura 1 m. Pavarea se poate realiza folosind dale de două tipuri:

Tipul F:



Tipul I:



Observați că o dală de tip F este formată din 6 pătrate de latură 1 m, dispuse în forma literei F (deci acoperă o suprafață cu aria de  $6 \text{ m}^2$ ), iar o dală de tipul I este formată din două pătrate cu latura de 1 m (deci va avea aria  $2 \text{ m}^2$ ).

# LOTUL NAȚIONAL DE INFORMATICĂ

Stagiul de pregătire a lotului național de informatică 20-27 mai 2017 Alexandria

**Pavarea suprafețelor dreptunghiulare folosind piese de forme specificate**, Doru Anastasiu Popescu, Universitatea din Pitești

Prin pavarea pietei se înțelege acoperirea fiecărui pătrat de latură 1 m al pietei cu exact o singură dală. Dalele se pot roti și pot fi utilizate pe orice față.

Restricția impusă de primar este ca suprafața din piață pavată cu dale de tipul F să aibă aceeași arie cu cea pavată cu dale de tipul I.

Pentru a vizualiza modalitatea de pavare a pietei, Ionică va numerota dalele cu numere naturale consecutive începând de la 1. Numărul asociat unei dale va fi scris în fiecare pătrat din piață acoperit de dala respectivă.

## Cerință

Scrieți un program care să determine o modalitate de pavare a pietei, care să respecte condițiile de mai sus.

## Date de intrare

Fișierul de intrare `pavare.in` va conține pe prima linie două numere naturale separate prin spațiu  $n$  și  $p$  reprezentând numărul de linii și respectiv numărul de coloane ale matricei.

## Date de ieșire

Fișierul de ieșire `pavare.out` va conține  $n$  linii, pe fiecare linie fiind scrise  $p$  numere naturale separate prin câte un spațiu. Valorile scrise în fișierul de ieșire sunt numerele asociate dalelor care acoperă cele  $n \times p$  pătrate ale pietei.

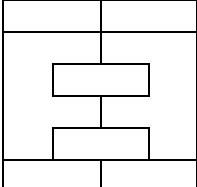
## Restricții și precizări

$$3 \leq n, p \leq 150$$

Produsul  $n \cdot p$  este multiplu de 24.

Soluția nu este unică, se poate afișa orice soluție.

## Exemplu

<code>pavare.in</code>	<code>pavare.out</code>	Descriere exemplu
6 4	7 7 8 8 1 1 2 2 1 3 3 2 1 1 2 2 1 4 4 2 5 5 6 6	Am pavat o piață cu 6 linii și 4 coloane, având aria $24 \text{ m}^2$ . Pentru pavare s-au utilizat 8 dale (2 dale de tip F care acoperă o suprafață cu aria $2 \cdot 6 = 12 \text{ m}^2$ și 6 dale de tip I, care acoperă restul pietei, având de asemenea aria $12 \text{ m}^2$ ). Fișierul de ieșire corespunde pavării: 

# LOTUL NAȚIONAL DE INFORMATICĂ

Stagiul de pregătire a lotului național de informatică 20-27 mai 2017 Alexandria

Pavarea suprafețelor dreptunghiulare folosind piese de forme specificate, Doru Anastasiu Popescu, Universitatea din Pitești

## Soluție

Din două dale de tipul  $F$  putem acoperi o suprafață dreptunghiulară cu 4 linii și 3 coloane, respectiv 3 linii și 4 coloane (dacă o rotim cu  $90^\circ$  la stânga sau la dreapta):

k	k	h
k	h	h
k	k	h
k	h	h

(\*)

Avem două situații:

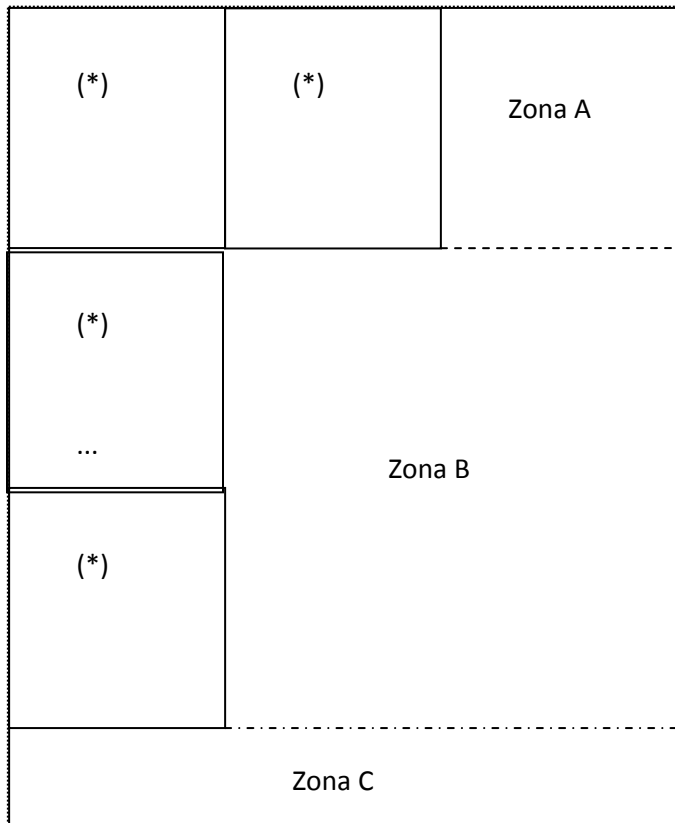
1. **Dacă  $m \geq n$** , atunci folosind (\*) pavăm în jos piața primele 3 coloane, apoi tot în jos coloanele 4, 5, 6 ș.a.m.d., cât timp aria suprafeței acoperite este mai mică decât jumătate din aria suprafeței pietii (adică  $m \cdot n / 2$ ). Acest lucru se poate realiza, pentru că (\*) are aria 12 și  $m \cdot n$  este multiplu de 24. Apoi zonele rămase (zona A, zona B, zona C) se pavează cu dale de tipul I, orizontale sau verticale. Pot exista și zone vide (din cele trei A, B, C). Datorită parității laturii verticale din (\*) zona A are latura verticală pară și deci poate fi acoperită cu dale de tipul I poziționate vertical. Același lucru se întâmplă cu zona B. Pentru zona C, observăm că latura ei verticală are aceeași paritate cu cea a lui  $m$  și cum latura orizontală este  $n$ , iar  $m \cdot n$  este multiplu de 24, rezultă că zona poate fi pavată ori numai cu dale de tipul I, orizontale, ori numai verticale (după cum este  $m$  sau  $n$  par).



# LOTUL NAȚIONAL DE INFORMATICĂ

Stagiul de pregătire a lotului național de informatică 20-27 mai 2017 Alexandria

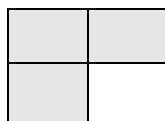
Pavarea suprafețelor dreptunghiulare folosind piese de forme specificate, Doru Anastasiu Popescu, Universitatea din Pitești



2. **Dacă  $n > m$** , atunci schimbăm între ele valorile lui  $m$  și  $n$ , după care ne situăm în primul caz. După construirea soluției, rotim cu  $90^\circ$  la stânga sau la dreapta tabloul și îl afișăm.

## Problema pav (Lot junior, 2008, Iași)

Ionică, tânăr inginer constructor vrea să-și schimbe locul de muncă cu unul mai bine plătit. Pentru a ocupa acest nou post trebuie să prezinte un CV și să susțină o probă teoretică. Dacă la CV stă foarte bine, datorită seriozității de care a dat dovadă la vechiul loc de muncă, hopul cel mai mare este proba teoretică. La această probă el primește ca sarcină pavarea pieței din centrul orașului, de formă pătratică, având latura de  $2^n$  metri. Acestea îi asociem un tablou bidimensional cu  $2^n$  linii și  $2^n$  coloane, atât liniile cât și coloanele fiind numerotate cu numere de la 1 la  $2^n$ . Dalele care vor fi folosite la pavare sunt formate din 3 pătrate, fiecare de latură 1 m, ca în figura:



# LOTUL NAȚIONAL DE INFORMATICĂ

Stagiul de pregătire a lotului național de informatică 20-27 mai 2017 Alexandria

**Pavarea suprafețelor dreptunghiulare folosind piese de forme specificate, Doru Anastasiu Popescu, Universitatea din Pitești**

Piața conține un pom vechi de câteva sute de ani, care trebuie să rămână și după pavare. Acest pom ocupă un singur pătrat de latură 1 m din piață (cât un element din tabloul bidimensional asociat pieței).

Prin pavarea pieței se înțelege acoperirea fiecărui pătrat de latură 1 m al pieței cu exact o singură dală, exceptând pătratul unde se găsește pomul. Pentru a vizualiza modalitatea de pavare a pieței, Ionică va numerota dalele cu numere naturale consecutive începând de la 1. Numărul asociat unei dale va fi scris în fiecare pătrat din piață acoperit de dala respectivă.

## Cerință

Scrieți un program care să determine o modalitate de pavare a pieței, care să respecte condițiile de mai sus.

## Date de intrare

Fișierul de intrare `pav.in` va conține pe prima linie numărul  $n$ , iar pe linia a doua poziția pomului descrisă prin indicii liniei și coloanei corespunzătoare, separate printr-un spațiu.

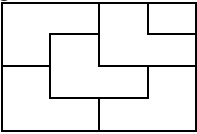
## Date de ieșire

Fișierul de ieșire `pav.out` va conține  $2^n$  linii, pe fiecare linie fiind scrise  $2^n$  numere naturale separate prin câte un spațiu. Valorile scrise în fișierul de ieșire sunt numere consecutive începând cu 1 asociate dalelor care acoperă piața. Pentru elementul din tablou unde se găsește pomul se va folosi cifra 0.

## Restricții și precizări

- $1 \leq n \leq 9$
- soluția nu este unică, se poate afișa orice soluție.
- o dală poate fi rotită cu  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ , respectiv  $270^\circ$ .

## Exemplu

<code>pav.in</code>	<code>pav.out</code>	Descriere exemplu
2 1 4	2 2 5 0 2 1 5 5 3 1 1 4 3 3 4 4	Am pavat o piață cu 4 linii și 4 coloane, având pomul pe linia 1 și coloana 4. Pentru pavare s-au utilizat 5 dale (numerotate cu 1, 2, 3, 4, 5). Fișierul de ieșire corespunde pavării: 

**Timp maxim de execuție/test:** 0,5 secunde

## Soluție-pav

Mai întâi trebuie să determinăm în variabila  $k$  puterea  $2^n$ , pentru dimensiunea tabloului.

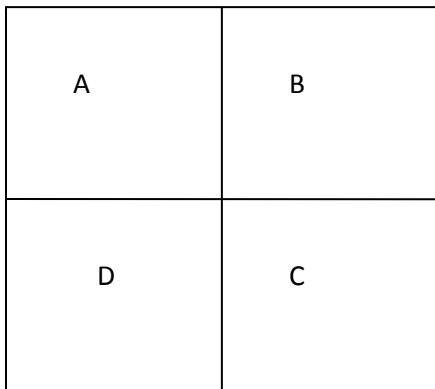
# LOTUL NAȚIONAL DE INFORMATICĂ

Stagiul de pregătire a lotului național de informatică 20-27 mai 2017 Alexandria

Pavarea suprafețelor dreptunghiulare folosind piese de forme specificate, Doru Anastasiu Popescu, Universitatea din Pitești

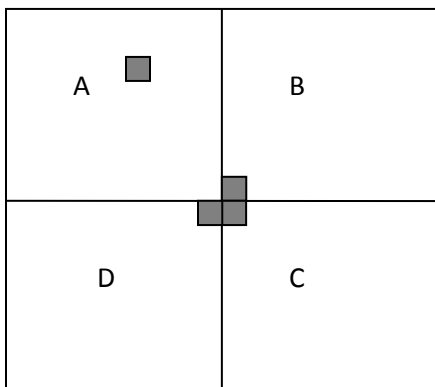
Vom rezolva problema impartind problema in patru subprobleme.

Impartim tabloul in patru zone patratice de aceeasi dimensiune, ca in figura:



Pomul poate fi in una din zonele A, B, C, D.

1. Daca pomul este in zona A vom pune o dala in centru ca in fig. de mai jos, dupa care impartim problema in patru, conform cu zonele A, B, C, D, fiecare cu cate un patratel acoperit si continuam procedeul.

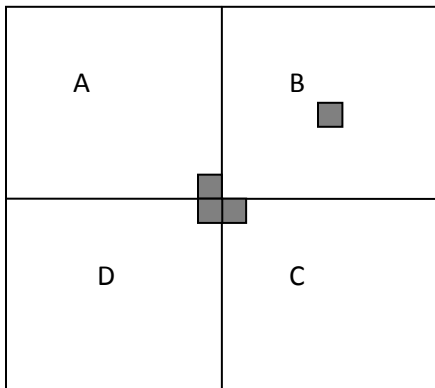


2. Daca pomul este in zona B vom pune o dala in centru ca in fig. de mai jos, dupa care impartim problema in patru, conform cu zonele A, B, C, D, fiecare cu cate un patratel acoperit si continuam procedeul.

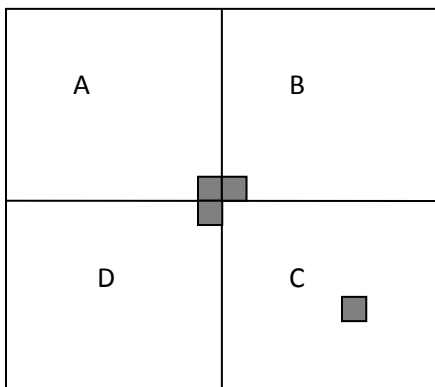
# LOTUL NAȚIONAL DE INFORMATICĂ

Stagiul de pregătire a lotului național de informatică 20-27 mai 2017 Alexandria

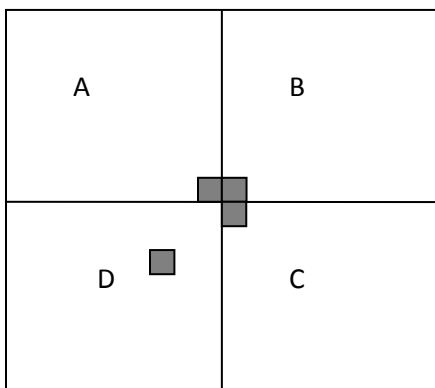
Pavarea suprafețelor dreptunghiulare folosind piese de forme specificate, Doru Anastasiu Popescu, Universitatea din Pitești



3. Dacă pomul este în zona C vom pune o dala în centru ca în fig. de mai jos, după care împartim problema în patru, conform cu zonele A, B, C, D, fiecare cu câte un patratel acoperit și continuăm procedeul.



4. Dacă pomul este în zona C vom pune o dala în centru ca în fig. de mai jos, după care împartim problema în patru, conform cu zonele A, B, C, D, fiecare cu câte un patratel acoperit și continuăm procedeul.



# LOTUL NAȚIONAL DE INFORMATICĂ

Stagiul de pregătire a lotului național de informatică 20-27 mai 2017 Alexandria

Pavarea suprafețelor dreptunghiulare folosind piese de forme specificate, Doru Anastasiu Popescu, Universitatea din Pitești

---

Pentru a “pune” o dala, folosim un contor  $h$  (initial 0), pe care îl incrementăm la fiecare pas.

## Probleme propuse și materiale de studiat

Problema 1 (Olimpiada de Informatică, București, 1995)

Problema 2 (Lot 2001)

Problema 3 (Concursul Național de Informatică Lugoj, 1998)

Problema 6 (ONI 2001)

Problema 7 (ACM ICPC 1997)

Problema 8: Floor tiles (Lot matematică 2001)

Problema 1: MagicBoxes (TopCoder)

Problema 2: Pavement (IOI 2001)

Problema 3 (ACM ICPC 1997)

Problema 4: Hardwood Floor (SGU)

Problema 5: CaseysArt (TopCoder)

Problema 6: Another chocolate maniac (SGU)

Problema 7: Bugs (CEOI 2002)

Problema 8 (Lot 2001, SGU Domino, IPSC 2004, Algoritmus 2005, IOI 2005)

<http://www.infoarena.ro/probleme-de-acoperire-1>

<http://www.infoarena.ro/probleme-de-acoperire-2>

<http://www.infoarena.ro/problema/pavare>

<http://www.infoarena.ro/problema/pav>

[https://community.topcoder.com/stat?c=problem\\_statement&pm=932](https://community.topcoder.com/stat?c=problem_statement&pm=932)

<http://campion.edu.ro/arhiva/index.php?page=problem&action=view&id=1658>

<http://campion.edu.ro/arhiva/index.php?page=problem&action=view&id=852>

<http://campion.edu.ro/arhiva/index.php?page=problem&action=view&id=321>

<http://campion.edu.ro/arhiva/index.php?page=problem&action=view&id=639>

<http://campion.edu.ro/arhiva/index.php?page=problem&action=view&id=1223>

# LOTUL NAȚIONAL DE INFORMATICĂ

Stagiul de pregătire a lotului național de informatică 20-27 mai 2017 Alexandria

**Pavarea suprafețelor dreptunghiulare folosind piese de forme specificate**, Doru Anastasiu Popescu, Universitatea din Pitești

---

## Bibliografie

1. <http://www.infoarena.ro>
2. <http://campion.edu.ro/arhiva>
3. Doru Popescu Anastasiu, Andrei Eugeniu Ioniță, Combinatorică și teoria grafurilor, Editura Rhabon, Tg. Jiu, 2005