Metode de numărare

I. Folosirea unor numere importante din combinatorică

Produs cartezian

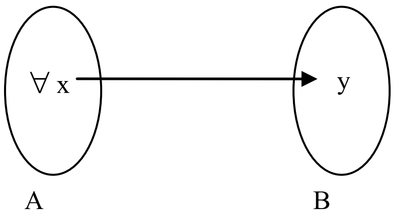
Fie $A_1, ..., A_n$ mulţimi cu $m_1, m_2, ..., m_n$ elemente.
Numărul de elemente al mulţimii $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ este $m_1 \cdot m_2 \cdot ... \cdot m_n$.

Părţile unei mulţimi

Fie $A=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Numim parte a mulţimii A orice submulţime a acestei mulţimi. Mulţimea părţilor lui A se notează cu P(A) şi are 2^n elemente.

Numărul de funcţii

Fie A şi B două mulţimi cu n, respectiv m elemente. Prin funcţie înţelegem o diagramă de forma



Prin care oricărui element x din A i se asociază un unic element y din B.
Dacă notăm cu f această asociere, atunci scriem f:A→B.
Numărul acestor funcţii este m^n.

Pemutări

Fie A= $\{a_1, a_2, . . ., a_n\}$ o mulţime de numere reale. Această mulţime va fi reprezentată în continuare cu ajutorul vectorului a = $(a_1, a_2, . . ., a_n)$. Prin **permutare** a mulţimii A vom înţelege, orice vector de dimensiune n ce conţine toate elementele mulţimii A într-o anumită ordine.
Numărul permutărilor unei mulţimi cu n elemente este egal cu $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n$. (demonstraţia acestui rezultat se face prin inducţie matematică).

Combinări

Fie $A=\{a_1, a_2, . . ., a_n\}$ o mulţime. În continuare vom studia problema generării tuturor submulţimilor cu m elemente ($m\in\{1, 2, . . ., n\}$) ale mulţimii A. O astfel de submulţime se numeşte **m-combinare cu n elemente** a mulţimii A.

Numărul de m-combinări cu n elemente este egal cu $\frac{n!}{m!(n-m)!}$, *notat prin* C_n^m *sau* $\binom{n}{m}$, unde $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n$.

Aranjamente

Fie A= $\{a_1, a_2, . . ., a_n\}$ o mulţime. Fiind dat $m\in\{1, 2, . . ., n\}$, prin **m-aranjament cu n elemente** al muţimii A înţelegem orice submulţime ordonată cu m elemente a lui A (adică orice vector de dimensiune m cu elemente distincte din A).

Numărul de m-aranjamente cu n elemente este egal cu $\frac{n!}{(n-m)!}$, *care se notează cu* A_n^m. Se observă că dintr-o m-combinare cu n elemente se obţin m!, m-aranjamente cu n elemente şi deci $A_n^m = m!C_n^m$.

II. Principiul includerii şi excluderii

Enunţul principiului

Fiind date n≥2 mulţimi finite $A_1, A_2, \ldots, A_n$ şi notând cu card(A) numărul de elemente al mulţimii A, atunci:

$$card(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} card(A_i) - \sum_{i<j} card(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{n-1} card(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)$$

Demonstraţie

Inducţie matematică cu pasul 1 după n.

Aplicaţie

Se dau $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ($n\le 10$) numere prime distincte mai mici sau egale decât k (k număr natural). Se cere să se determine câte numere naturale mai mici sau egale cu k sunt divizibile cu unul din numerele $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Exemplu

Pentru `n=3`, `p1=2`, `p2=3`, `p3=5`, `k=1000` se va afişa: `734`

(DPA, Baraj lot olimpic de informatică, 2000)

Indicatie

Considerăm mulţimile: $A_i=\{p_i q \mid q\in N, p_i q\le k\}$, $i\in\{1,2,\ldots,n\}$.

Observăm că numărul căutat este $r=card(A_1\cup A_2\cup \ldots \cup A_n)$, care este egal (conform principiului includerii şi

$$\sum_{i=1}^{n} card(A_i) - \sum_{i<j} card(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{n-1} card(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)$$

excluderii) cu:

Folosind $card(A_i)= card(\{p_i q \mid q\in N, p_i q\le k\})=[k/p_i]$, $i\in\{1,2,\ldots, n\}$, $card(A_i\cap A_j)= card(\{p_i p_j q \mid q\in N, p_i p_j q\le k\})= [k/(p_i p_j)]$, $i,j\in\{1,2,\ldots, n\}$, etc. se obţine:

$$r = \sum_{i=1}^{n} [k/p_i] - \sum_{i<j} [k/(p_i p_j)] + \sum_{i<j<k} [k/(p_i p_j p_k)] + \ldots + (-1)^{n-1} [k/(p_1 p_2 \ldots p_n)]$$

Pentru a calcula fiecare sumă din r, trebuie sa se genereaze termenii sumei, prin metoda backtracking.

III. Folosirea unor formule pentru sume de numere naturale

1. Suma primelor n numere naturale

$1+2+\ldots+n=n(n+1)/2$

2. Suma pătratelor primelor n numere naturale

$1^2+2^2+\ldots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6$

3. Suma cuburilor primelor n numere naturale

$1^3+2^3+\ldots+n^3=(n(n+1)/2)^2$

4. Suma numerelor impare mai mici sau egale cu n=2k+1

$1+3+\ldots+n=(k+1)^2$

5. Suma numerelor pare mai mici sau egale cu n=2k

$2+4+\ldots+n=k(k+1)$

IV. Progresii aritmetice si geometrice

Un sir de numere în care fiecare termen, începând cu al doilea, se obţine din cel precedent prin adăugarea unei constante (numită raţie), se numeşte *progresie aritmetică*.

Proprietăţi
Dacă a este primul termen, iar r este raţia unei progresii aritmetice (formată din termenii x_1, x_2,...,x_n), atunci:
1) $x_k=x_{k-1}+r$
2) $x_1=a$
3) $x_k=(x_{k-1}+x_{k+1})/2$
4) $x_k=a+(k-1)r$
5) $x_1+x_2+\ldots+x_n=(x_1+x_n)n/2=(2a+(n-1)r)n/2$.

Un sir de numere în care fiecare termen, începând cu al doilea, se obţine din cel precedent prin înmulţirea cu o constantă nenulă (numită raţie), se numeşte *progresie geometrică*.

Proprietăţi
Dacă a este primul termen, iar q este raţia unei progresii geometrice (formată din termenii x_1, x_2,...,x_n), atunci:
1) $x_k=x_{k-1}*q$
2) $x_1=a$
3) $x_k=\mathrm{sqrt}(x_{k-1}*x_{k+1})$
4) $x_k=a*q^{k-1}$
5) $x_1+x_2+\ldots+x_n=(q*x_n-x_1)/(q-1)=(q^{n-1}-1)a/(q-1)$, q diferit de 1.

V. Metoda backtracking

Prin această metodă se generează toate obiectele cu o anumită proprietate şi se numără, fără a reţine soluţiile. Numărul rezultat este cel căutat.

VI. Metoda programării dinamice. Relaţii de recurenţă.

Pentru a număra obiectele cu o anumită proprietate, dintr-o problemă se stabilesc diverse formule de recurenţă, care pot fi găsite mai uşor. Uneori numărul căutat are o formă mai complicată (este o expresie ce poate conţine: permutări, combinări, puteri, etc.) şi deaceea este mai la îndemână găsirea unor relaţii de recurenţă.

Aplicaţii

1. **Problema "NR"**, PACO

Se consideră **n** număr natural nenul. Un joc DOMINO conţine dominouri în formă de dreptunghi **1×2**. Pe un domino se găsesc inscripţionate prin puncte, două numere (pentru fiecare număr k sunt desenate k puncte) ca în exemplul următor:

| • | •• | - conţine perechea de numere (1,2)

| | • | - conţine perechea de numere (0,1)

Jocul DOMINO conţine pe dominouri următoarele perechi de numere:
`(0,0); (1,1); (2,2); (3,3)… (n-1,n-1); (n,n)`
`(0,1); (1,2); (2,3); (3,4)… (n-1,n)`

```
(0,2); (1,3); (2,4); …(n-2,n)
…
(0,n-1); (1,n)
(0,n)
```

Cerinţă

Se cere numărul total de puncte desenate pe dominourile jocului DOMINO.

Date de intrare

Fişierul de intrare **`nr.in`** conţine pe prima linie numărul **`n`**.

Date de ieşire

Fişierul de ieşire **`nr.out`** va conţine numărul cerut.

Restricţii

1≤n≤2000000000

Exemplu

nr.in	**nr.out**
2	12

Timp maxim de execuţie: 0.1 secunde/test

2. **Problema "tub"** arhiva .campion

3. **Problema "albine"** arhiva .campion

4. **Problema "teatru1"** arhiva .campion

5. **Problema "scaune"** arhiva .campion

6. **Problema "degrade"** arhiva .campion

7. **Problema "scaune"** arhiva .campion

8. **Problema "cod1"** arhiva .campion

9. **Problema "grad2"** arhiva .campion

10. **Problema "palma"** arhiva .campion

11. **Problema "cd1"** arhiva .campion

Bibliografie

1. Doru Popescu Anastasiu, Combinatorică şi Teoria Grafurilor, 2005
2. A.M. Iaglom, I.M. Iaglom, Probleme neelementare tratate elementar. Ed. Tehnică, 1983.
3. P.Radovici Mărculescu, Probleme de teoria elementară a numerelor, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1986
4. Arhiva Educationala .campion